Chapitre 6 : Éléments de mécanique du solide

Rappel (cf. Chapitre 1 : un système matériel est appelé solide si les points qui le constituent sont à distance constante les uns des autres. Son repérage dans l'espace s'effectue à l'aide de six paramètres :
- les trois coordonnées d'un point du solide (le plus souvent son centre de gravité G)
- trois angles définissant l'orientation des trois axes d'un repère lié au solide par rapport au référentiel d'étude.

1. Solide en translation

1.1. Définition

On dit d'un solide qu'il est en translation dans le référentiel $\mathcal{R}$ si et seulement si les axes du repère qui lui est lié sont fixes dans $\mathcal{R}$.

1.2. Conséquences

Soit un solide en translation dans un référentiel $\mathcal{R}$. Soient $\left(\overrightarrow{u_x}\,;\overrightarrow{u_y}\,;\overrightarrow{u_z}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u_{x_1}}\,;\overrightarrow{u_{y_1}}\,;\overrightarrow{u_{z_1}}\right)$ les trièdres liés respectivement au référentiel $\mathcal{R}$ et au solide. $\left(\overrightarrow{u_{x_1}}\,;\overrightarrow{u_{y_1}}\,;\overrightarrow{u_{z_1}}\right)$ étant fixes dans $\mathcal{R}$, on choisit de faire coïncider les deux trièdres soit :

$$\left(\overrightarrow{u_x}\,;\overrightarrow{u_y}\,;\overrightarrow{u_z}\right)=\left(\overrightarrow{u_{x_1}}\,;\overrightarrow{u_{y_1}}\,;\overrightarrow{u_{z_1}}\right)$$

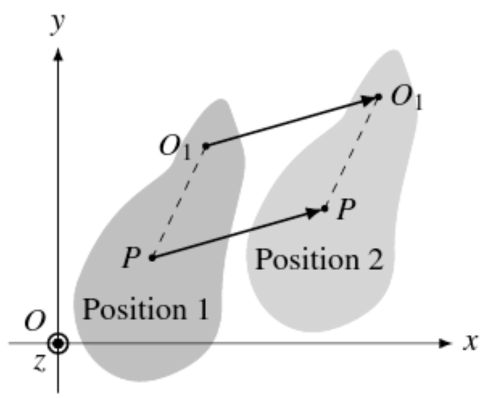
Soient O_1 l'origine du repère lié au solide et O celle du référentiel $\mathcal{R}$. Pour tout point quelconque P du solide, on a :

$$\overrightarrow{O_1P}=x_P\overrightarrow{u_{x_1}}+y_P\overrightarrow{u_{y_1}}+z_P\overrightarrow{u_{z_1}}$$

où $(x_P\,,y_P\,,z_P)$ sont les coordonnées du point P dans le repère lié au solide.
Or, compte tenu du choix des axes, nous pouvons également écrire :

$$\overrightarrow{O_1P}=x_P\overrightarrow{u_x}+y_P\overrightarrow{u_y}+z_P\overrightarrow{u_z}$$

Par définition d'un solide, le vecteur $\overrightarrow{O_1P}$ est constant ce qui implique que, dans le référentiel $\mathcal{R}$, la position du point P se déduit de celle de O_1 par simple translation de $\overrightarrow{O_1P}$ constant.



Il s'ensuit que tous les points d'un solide en translation ont le même mouvement. La connaissance du mouvement d'un seul point du solide (le plus souvent son centre de gravité) suffit à décrire le mouvement de ce dernier. On est donc ramené au cas de la cinématique du point.

1.3. Cas particuliers des translations rectiligne et circulaire

✓ Translation rectiligne

Si le centre de gravité d'un solide est animé d'un mouvement de translation rectiligne dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$, alors tous les points du solide également. On dit alors que le solide est en translation rectiligne dans $\mathcal{R}$.

exemple : ascenseur en translation verticale

✓ Translation circulaire

Si le centre de gravité d'un solide est animé d'un mouvement circulaire dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$, alors tous les points du solide également. On dit alors que le solide est en translation circulaire dans $\mathcal{R}$.

exemple : nacelle d'une grande roue

1.4. Étude dynamique d'un solide en translation

Comme nous venons de le voir, la description du mouvement d'un solide en translation s'effectue à l'aide d'un seul point du solide. De ce fait, l'étude dynamique d'un solide en translation s'effectue à l'aide :
- de la deuxième loi de Newton (chapitre $M2$)
- du théorème du moment cinétique (chapitre $M3$)
- des théorèmes énergétiques (chapitre $M4$)

appliqués au centre de gravité affecté de la masse du solide.

2. Solide en rotation autour d'un axe fixe

2.1. Définition

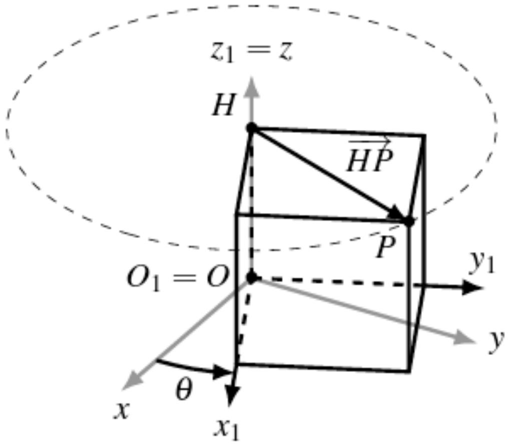
On dit d'un solide qu'il est en rotation autour d'un axe fixe (Δ) dans le référentiel $\mathcal{R}$ si et seulement s'il existe une unique droite (Δ) passant par le solide et immobile pour le solide et pour $\mathcal{R}$.

2.2. Conséquences

Soit un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ) dans un référentiel $\mathcal{R}$. Soient $\left(\overrightarrow{u_x};\overrightarrow{u_y};\overrightarrow{u_z}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u_{x_1}};\overrightarrow{u_{y_1}};\overrightarrow{u_{z_1}}\right)$ les trièdres liés respectivement au référentiel $\mathcal{R}$ et au solide.

Pour simplifier, on considère que :
- les origines des deux repères sont confondus $O = O_1$
- l'axe (Δ) est confondu avec les axes (Oz) et (Oz_1) ce qui implique $\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_{z_1}}$

Considérons un cube en bois en rotation autour d'une de ses arêtes.



Soit un point P du solide et H sa projection sur l'axe (Oz). On a alors :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP}$$

Comme $O = O_1$, H et P appartiennent tous trois au solide, on a que :

$$\begin{cases} OH = z = Cte \\ HP = r = Cte \\ \left(\overrightarrow{u_{x_1}} ; \overrightarrow{HP}\right) = \theta_P = Cte \end{cases}$$

Le mouvement du point P a donc lieu dans le plan $(x H y)$. Si on note $\theta(t) = \left(\overrightarrow{u_x} ; \overrightarrow{u_{x_1}}\right)$, on a en utilisant les coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z} \text{ et } \overrightarrow{v_{P/R}} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{HP}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ ne dépendant pas de P, est commune à tous les points du solide. On parle ainsi de vitesse de rotation Ω du solide autour de l'axe de rotation (Δ).

Ainsi, tout point P d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ) aura un mouvement de translation circulaire tel que :

- le centre est le projeté du point P sur l'axe (Δ)
- le rayon est la distance du point P à l'axe (Δ)
- la vitesse angulaire est égale à la vitesse de rotation Ω du solide autour de l'axe (Δ)

2.3. Moment cinétique scalaire d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit un solide en rotation à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$ autour d'un axe fixe (Δ) dans un référentiel $\mathcal{R}$. On utilisera les coordonnées cylindriques et pour simplifier, on choisit l'axe (Oz) confondu avec l'axe (Δ). On modélise le solide comme un ensemble de points (M_i, m_i) de coordonnées (r_i, θ_i, z_i).

Tous les points du solide en rotation décrivent des trajectoires circulaires de rayon r_i à la même vitesse angulaire :

$$\dot{\theta}_i = \Omega$$

On en déduit que, pour le point M_i, on a :

$$\overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}}} = r_i\,\dot{\theta}_i\,\overrightarrow{u_\theta} = r_i\,\Omega\overrightarrow{u_\theta}$$

Soit pour le moment cinétique scalaire par rapport à l'axe (Δ)

$$\begin{aligned} L_{(\Delta)}(M_i) &= \left(\overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}}}\right).\overrightarrow{u_\Delta} \\ &= m_i\left(\left(r_i\overrightarrow{u_r} + z_i\overrightarrow{u_z}\right)\wedge r_i\,\Omega\overrightarrow{u_\theta}\right).\overrightarrow{u_z} \\ &= m_i\left(r_i^2\,\Omega\overrightarrow{u_z} - z_i\,r_i\,\Omega\overrightarrow{u_r}\right).\overrightarrow{u_z} \\ &= m_i r_i^2\,\Omega \end{aligned}$$

Le moment cinétique scalaire du solide est ainsi donné par la somme des moments cinétiques scalaires des différents points qui le constituent, soit :

$$L_{(\Delta)} = \sum_i L_{(\Delta)}(M_i) = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\times\Omega$$

On définit le moment d'inertie $J_{(\Delta)}$ du solide par rapport à l'axe (Δ) comme la grandeur telle que :

$$L_{(\Delta)} = J_{(\Delta)}\times\Omega$$

Il s'ensuit que le moment d'inertie $J_{(\Delta)}$ du solide a pour expression :

$$J_{(\Delta)} = \sum_i m_i r_i^2$$

L'unité du moment d'inertie est donc $kg.m^2$.

Le solide peut également être modélisé par une répartition continue (et non discrète comme ici) de la masse. Pour cela, on a recours à la masse volumique $\rho(M)$ où M est un point quelconque du solide.

Dans ce cas, l'expression du moment d'inertie devient :

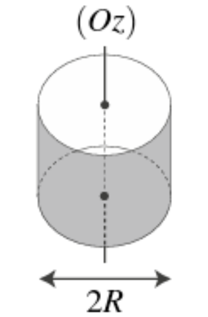
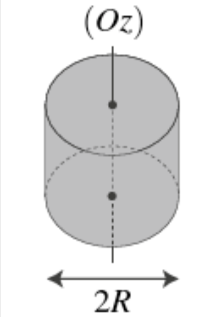
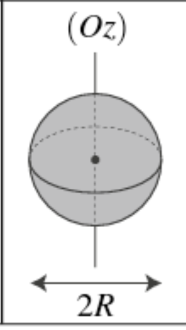
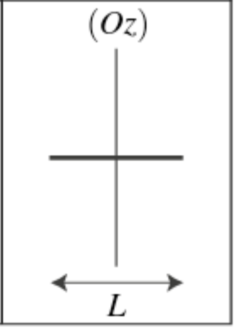
$$J_{(\Delta)} = \iiint_M \rho(M)\,r^2\,d\tau_M$$

où $d\tau_M$ est un volume infiniment petit comprenant M et r la distance du point à l'axe (Δ).

On parle de solide homogène si la masse volumique est la même en tout point du solide (répartition uniforme de la masse) :

$$\rho(M) = \rho_0$$

Voici les moments cinétiques de quelques solides homogènes.

cylindre vide de rayon R	cylindre plein de rayon R	boule de rayon R	barre de longueur L
mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
			

La contribution au moment d'inertie d'un point de masse m est d'autant plus importante que ce point éloigné de l'axe. Ceci permet d'expliquer pourquoi un cylindre creux a un moment d'inertie plus important qu'un cylindre plein de même masse : toute la masse du cylindre creux est répartie sur la surface externe distante de R, offrant ainsi une contribution maximale au moment d'inertie (ce qui n'est pas le cas pour le cylindre plein).

On comprend de ce fait que la mesure du moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe apporte des informations sur la répartition des masses dans le solide.

2.4. Loi du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit un solide en rotation à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$ autour d'un axe fixe (Δ) dans un référentiel $\mathscr{R}$. On suppose que le solide est soumis à un ensemble de force $\{\vec{f_i}\}$.
Remarque : il est à noter que si on parle de forces pour un point matériel, on parle plus souvent d'action ou d'effort agissant sur un solide.

La loi du moment cinétique appliquée au solide s'écrit :

$$\frac{dL_{(\Delta)}}{dt} = \sum_i \mathscr{M}_{(\Delta)}\left(\vec{f_i}\right)$$

En utilisant l'expression du moment cinétique scalaire en fonction du moment d'inertie, on obtient :

$$J_{(\Delta)}\ddot{\theta} = J_{(\Delta)}\frac{d\Omega}{dt} = \sum_i \mathscr{M}_{(\Delta)}\left(\vec{f_i}\right)$$

On peut remarquer la similitude avec la deuxième loi de Newton pour un solide en translation rectiligne suivant un axe (l'axe (Ox) par exemple).

$$v = \dot{x} \leftrightarrow \Omega = \dot{\theta}$$

$$m \leftrightarrow J_{(\Delta)}$$

$$f_i = \vec{f_i}\,.\,\vec{u_x} \leftrightarrow \mathscr{M}_{(\Delta)}\left(\vec{f_i}\right) = \overrightarrow{\mathscr{M}}\left(\vec{f_i}\right).\overrightarrow{u_{(\Delta)}}$$

L'analogie vaut aussi pour certains résultats qui découlent de ces relations :

- mouvement uniforme

$$\left(v = Cte, \ddot{x} = 0\right) si \sum_i f_i = 0 \leftrightarrow \left(\Omega = Cte, \ddot{\theta} = 0\right) si \sum_i \mathcal{M}_{(\Delta)}\left(\vec{f_i}\right) = 0$$

- solide en équilibre

$$\left(v = 0, \dot{x} = 0\right) si \sum_i f_i = 0 \leftrightarrow \left(\Omega = 0, \dot{\theta} = 0\right) si \sum_i \mathcal{M}_{(\Delta)}\left(\vec{f_i}\right) = 0$$

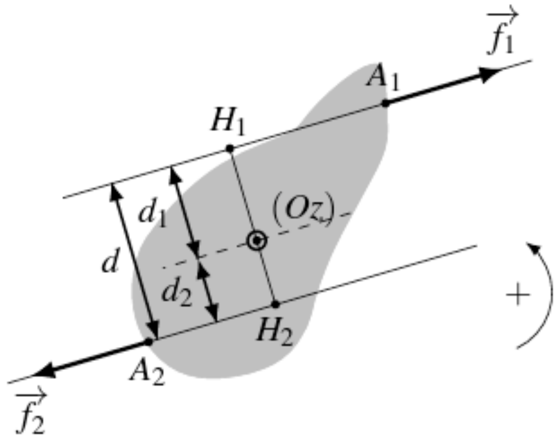
Nous pouvons ainsi déduire par analogie avec la masse une interprétation physique du moment d'inertie : le moment d'inertie est une grandeur intrinsèque d'un solide traduisant sa capacité à s'opposer à une mise en rotation autour de l'axe considéré.

2.4. Notion de couple

Soit un solide soumis à un couple de forces $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$, appliquées respectivement aux points A_1 et A_2 et telles que l'on ait :

$$\vec{f_1} + \vec{f_2} = \vec{0}$$

On notera par la suite : $\left\|\vec{f_1}\right\| = \left\|\vec{f_2}\right\| = f$



L'application de la deuxième loi de Newton met en évidence que le couple de force ne peut permettre une mise en translation du solide.

Les droites d'action des deux actions sont donc parallèles distantes respectivement d'une distance d_1 et d_2 de l'axe (Oz). En utilisant la notion de bras de levier, on effectue le calcul du moment scalaire total appliqué au solide qui s'écrit :

$$\mathcal{M}_{(Oz)} = -fd_1 - fd_2 = -fd \text{ soit } \vec{\Gamma} = -fd\vec{u_z}$$

L'application de la loi du moment cinétique montre qu'il y a donc mise en rotation du solide autour de l'axe (Oz).

On appelle couple $\vec{\Gamma}$ le moment d'un couple de forces opposées entraînant une rotation du solide autour de l'axe directeur de $\vec{\Gamma}$. Γ est une grandeur algébrique.

De ce fait, on a :

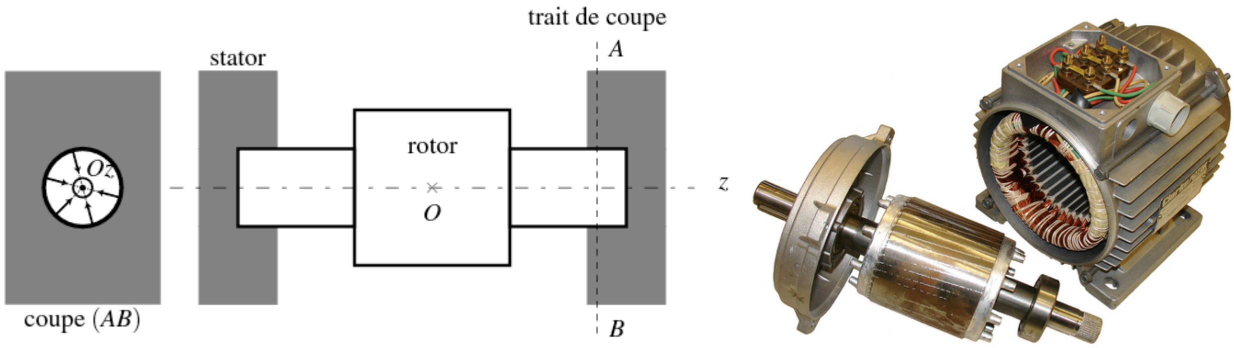
- dans le cas d'un solide initialement à l'arrêt, on a
  - si $\Gamma > 0$ alors on a une rotation dans le sens direct
  - si $\Gamma < 0$ alors on a une rotation dans le sens indirect
- dans le cas d'un solide déjà en rotation, on a :
  - si $\Gamma > 0$ alors $\ddot{\theta} > 0$ (par application de la loi du moment cinétique) ; on parle alors de couple moteur
  - si $\Gamma < 0$ alors $\ddot{\theta} < 0$; on parle alors de couple de freinage

2.5. Liaison pivot

Un dispositif rotatif est le plus souvent constitué :
- d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe : le rotor
- d'un solide immobile par rapport à l'axe de rotation du rotor : le stator

On appelle liaison pivot le mécanisme permettant d'astreindre le rotor à rester lié à l'axe de rotation, le mouvement du rotor étant alors réduit à un seul degré de liberté.

La liaison pivot assure ainsi un guidage parfait de la rotation autour de l'axe tout en évitant toute translation suivant cet axe. Dans la pratique, celle-ci est réalisée par l'emboitement de deux cylindres d'axe commun ainsi que des butées pour empêcher la translation.



Le guidage de la rotation du rotor autour de l'axe est dû à une action du stator sur le rotor (somme des forces réparties tout au long de la surface de contact). S'il n'y a pas de frottements, les forces sont normales à la surface de contact ; leurs droites d'action coupant l'axe de rotation, leurs moments scalaires est nul.

On parle ainsi de liaison pivot idéale (pas de frottements) si l'action du stator sur le rotor a un moment scalaire nul :

$$\mathcal{M}_{(\Delta)}(liaison) = 0$$

2.6. Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit un solide en rotation à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$ autour d'un axe fixe (Δ) dans un référentiel $\mathcal{R}$. On utilisera les coordonnées cylindriques et pour simplifier, on choisit l'axe (Oz) confondu avec l'axe (Δ). On modélise le solide comme un ensemble de points (M_i, m_i) de coordonnées (r_i, θ_i, z_i).

On a :

$$E_c(M_i) = \frac{1}{2} m_i \left(v_{M_i/\mathcal{R}}\right)^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \, \Omega^2$$

L'énergie cinétique du solide est ainsi donné par la somme des énergies cinétiques des différents points qui le constituent, soit :

$$E_c = \sum_i E_c(M_i) = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\Omega^2 = \frac{1}{2} J_{(\Delta)} \Omega^2$$

2.7. Loi de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

La loi de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'une axe fixe (Δ) s'énonce de la manière suivante :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}\left(\overrightarrow{f_i}\right)$$

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique du solide est égale à la somme des puissances des actions qui lui sont appliquées.

Pour démontrer cette loi, on a recours à la loi du moment cinétique. Celle-ci s'écrit :

$$J_{(\Delta)} \ddot{\theta} = J_{(\Delta)} \frac{d\Omega}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(\Delta)}\left(\overrightarrow{f_i}\right)$$

Par multiplication de l'équation par $\dot{\theta}$, on a :

$$J_{(\Delta)} \ddot{\theta} \dot{\theta} = \frac{1}{2} J_{(\Delta)} \frac{d\left(\dot{\theta}\right)^2}{dt} = \frac{dE_c}{dt} = \sum_i \dot{\theta} \, \mathcal{M}_{(\Delta)}\left(\overrightarrow{f_i}\right)$$

Soit $\overrightarrow{f_i}$ une force appliquée au point M_i d'un solide en rotation autour de l'axe (Δ). On cherche à exprimer la puissance de cette force dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$. On a

$$\mathcal{P}_{\overrightarrow{f_i}} = \overrightarrow{f_i} \cdot \overrightarrow{v_{M_i/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{f_i} \cdot r_i \, \Omega \overrightarrow{u_\theta} = f_{i_\theta} r_i \, \Omega$$

Or

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{f_i}\right) = \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{f_i} = \begin{vmatrix} r_i \\ 0 \\ z_i \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} f_{i_r} \\ f_{i_\theta} \\ f_{i_z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z_i \, f_{i_\theta} \\ z_i \, f_{i_r} - r_i \, f_{i_z} \\ r_i \, f_{i_\theta} \end{vmatrix}$$

Soit

$$\mathcal{M}_{(\Delta)}\left(\overrightarrow{f_i}\right) = r_i \, f_{i_\theta}$$

On peut donc écrire

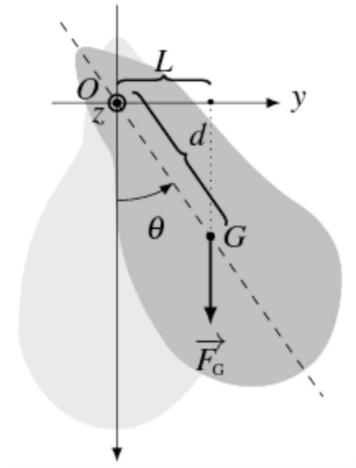
$$\mathcal{P}_{\overrightarrow{f_i}} = \Omega \, \mathcal{M}_{(\Delta)}\left(\overrightarrow{f_i}\right) = \dot{\theta} \, \mathcal{M}_{(\Delta)}\left(\overrightarrow{f_i}\right)$$

Finalement, on retrouve bien que

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}\left(\overrightarrow{f_i}\right)$$

2.8. Étude d'un exemple : le pendule pesant

On appelle pendule pesant un solide de forme quelconque en rotation autour d'un axe ne passant pas par son centre de gravité.



Pour cette étude, on considère que l'axe de rotation (Oz) est un des trois axes de la base cartésienne du référentiel terrestre pris pour référentiel d'étude.
Remarque : attention, ici, (Oz) est un axe horizontal !

On note G le centre de gravité du solide de masse m et de moment d'inertie $J_{(Oz)}$ par rapport à l'axe (Oz). La position du solide est repéré par l'angle θ qu'effectue la droite (OG) avec l'axe vertical descendant (Ox). Enfin, on suppose la liaison pivot parfaite.

Système : solide
Référentiel : terrestre galiléen
Bilan des actions : poids du solide, liaison pivot

La loi du moment cinétique s'écrit :

$$J_{(Oz)}\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{(Oz)}\left(\overrightarrow{P}\right) + \mathcal{M}_{(Oz)}(liaison)$$

La liaison étant parfaite, on a :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(liaison) = 0$$

Pour le poids, on a :

$$\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{u_x}$$

Soit

$$\mathcal{M}_{(Oz)}\left(\overrightarrow{P}\right) = -mgL = -mgd\sin(\theta)$$

On obtient ainsi l'équation

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{(Oz)}}\sin(\theta) = 0$$

En posant

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_{(Oz)}}}$$

on retrouve une équation similaire à celle obtenue pour le pendule simple

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

Les positions d'équilibre ($\dot{\theta} = 0$) sont obtenues pour

$$\sin(\theta_{eq}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_{eq} = 0\,[\pi]$$

À l'équilibre la droite (OG) est confondue avec la verticale (Ox). Dans la pratique, seule $\theta_{eq} = 0$ est réalisable car c'est une position d'équilibre stable.